



ممان اینرسی

نویسنده: بهنام حمزه تاش – سعید کاویان پور

مقدمه

مفهوم ممان اینرسی (Moment of Inertia) بسیار شبیه به مفهوم سختی می باشد. سختی به معنای مقاومت در برابر تغییر مکان می باشد و نشان می دهد که چه میزان نیرو لازم است تا یک جسم در جهت نیرو، تغییر مکان واحد بدهد؛ ممان اینرسی هم به نوعی بیانگر مقاومت در مقابل لنگر و چرخش می باشد. در این مقاله ابتدا مفهوم فیزیکی ممان اینرسی بررسی شده و در ادامه روش های مختلفی که می توان ممان اینرسی مقاطع با اشکال متفاوت را محاسبه نمود، معرفی خواهد شد.

با مطالعه این مقاله چه می آموزید؟

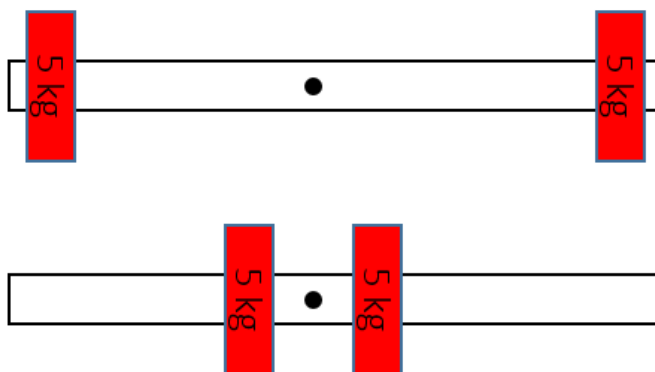
۱. مفهوم ممان اینرسی و چند مثال مفهومی برای درک بهتر آن
۲. محاسبه ممان اینرسی به کمک فرمول اصلی آن
۳. روش انتقال و دوران محورها برای محاسبه ممان اینرسی، حول محورهای مختلف مقطع
۴. روش چرخش (دوران) محورها در محاسبه ممان اینرسی
۵. محاسبه ممان اینرسی مقاطع مرکب

مفهوم ممان اینرسی و چند مثال مفهومی برای درک بهتر آن

در سازه، یکی از مهم ترین نیروهایی که به هر عضو، مانند تیرها، وارد می شود ممان یا لنگر است. در نتیجه عضو باید به گونه ای طراحی شود که در مقابل این لنگرها مقاومت مناسبی داشته باشند. از این رو، یکی از مهم ترین راه کارها برای طراحی اعضای خمشی، افزایش ممان اینرسی مقطع آن ها می باشد تا در مقابل خمش مقاومت نمایند.

حال سؤال اصلی اینجاست که چه پارامترهایی در افزایش یا کاهش ممان اینرسی یک مقطع تأثیر گذارند؟ برای پاسخ به این سؤال، از یک مثال ساده استفاده می نمایم:

دو میله به طول ۱ متر را در نظر بگیرید، در دو سر این میله ها وزنه های ۵ کیلوگرمی نصب شده است، با این تفاوت که این وزنه ها در یکی از میله ها کاملاً در دو انتهای میله قرار داده شده اند اما در میله ی دیگر این دو وزنه با فاصله کمتری در مرکز میله قرار دارند. در صورتی که بخواهیم این دو میله را از وسط به کمک یک دست، حول محوری عمود بر محور میله بچرخانیم، به نظر شما چرخاندن کدام میله راحت تر خواهد بود؟



دو میله با طول یک متر، به همراه دو وزنه در دو طرف آن

قدم اول طراحی سازه‌ها را الان بردارید

هیچگاه فکر می‌کردید مدلسازی و نقشه‌خوانی اینقدر نکته‌داشته باشد؟

آیا می‌توانید ستون‌گذاری پیشنهادی معمار را اصلاح کنید؟

آیا مدل کردن دو سازه متفاوت در کنار یکدیگر با زلزله متفاوت را تجربه کرده‌اید؟

آیا رسم قوس و گنبد را بلدید؟

آیا به نقشه‌خوانی که در دانشگاه به شما آموزش نمی‌دهند کاملاً مسلط هستید؟

این مرحله از طراحی سازه را می‌توان **حساس‌ترین و مهم‌ترین مرحله** طراحی دانست! چرا؟ اگر در این بخش سازه به درستی به نرم افزار معرفی نشود، شما هر چقدر در بخش‌های دیگر دقت به خرج دهید بیهوده خواهد بود. پس از همین امروز می‌توانید در ۸ ساعت فیلم آموزشی فشرده، هر نکته‌ای که در مدلسازی و نقشه‌خوانی لازم دارید یاد بگیرید.

آموزش کلیه ریزه‌کاری‌های مدلسازی و نقشه‌خوانی سازه‌ها در ۸ ساعت

بخش اول: استخراج داده‌های سازه‌ای از نقشه معماری
بخش دوم: انتخاب سیستم سازه‌ای
بخش سوم: رسم شبکه سازه در نرم افزار ایتبس
بخش چهارم: رسم اعضای سازه‌ای



قیمت اصلی: ۱۰۰,۰۰۰ تومان

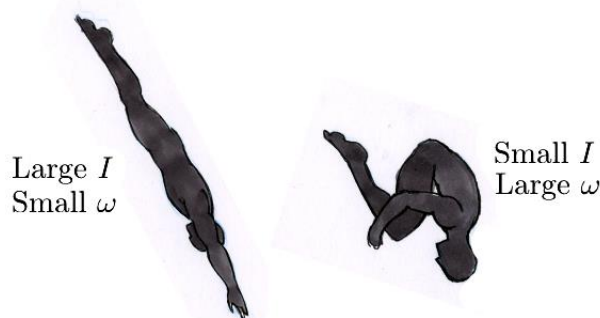
**قیمت با تخفیف:
تنها ۳۰,۰۰۰ تومان**

برای دریافت قدم اول طراحی سازه با **۷۰,۰۰۰ تومان تخفیف** به آدرس زیر بروید

sbz.one/fs-tarahi

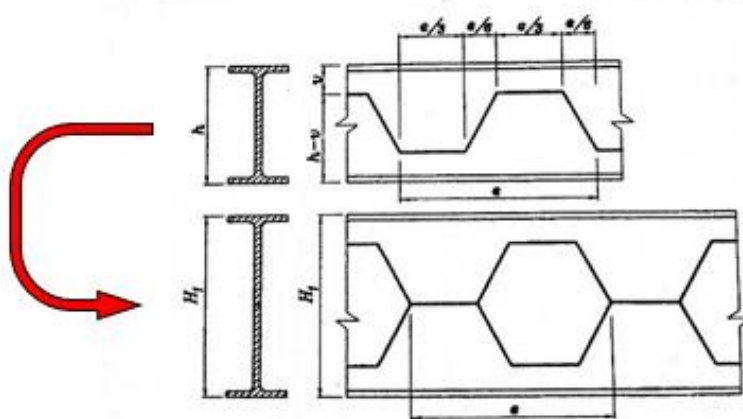


به احتمال زیاد شما هم موافق هستید که چرخاندن میله‌ی دوم راحت‌تر می‌باشد. دلیل این پدیده، با توجه به اینکه جرم هر دو میله برابر می‌باشد، تفاوت ممان اینرسی این دو میله است، به طوری که میله‌ی دوم به دلیل ممان اینرسی کمتر، مقاومت کمتری هم در مقابل چرخش از خود نشان می‌دهد. با ذکر این مثال می‌توان فهمید که ممان اینرسی ارتباط زیادی به نحوه‌ی توزیع جرم در مقطع خواهد داشت به طوری که هر چه جرم به مرکز سطح نزدیک‌تر باشد، ممان اینرسی هم کمتر خواهد بود. این پدیده را در پرش شناگران از ارتفاع هم می‌توان مشاهده کرد. در این حالت، شناگر بدن خود را طوری جمع می‌نماید که تمامی جرم بدن به مرکز آن نزدیک شده تا چرخش بدن راحت‌تر شود. در این حالت در واقع سرعت دوران بدن (ω) بیشتر خواهد بود.



تفاوت ممان اینرسی حالت‌های مختلف بدن شناگران در هنگام پرش

در برخی از اعضای سازه‌ای مانند تیرها، نیروی اصلی و حاکم بر طراحی عضو معمولاً خمش می‌باشد. در نتیجه افزایش ممان اینرسی در این اعضا اهمیت زیادی خواهد داشت. تیرهای I شکل با توجه به نکات ذکر شده، به دلیل دورتر شدن جرم از مرکز سطح (به عبارت دقیق‌تر، تار خنثی)، دارای ممان اینرسی بیشتری در مقایسه با یک مقطع مستطیل شکل با جرم برابر می‌باشد. همچنین، ساخت [تیرهای لانه‌زنبوری](#) هم دقیقاً با همین فلسفه، به خصوص در گذشته رواج یافت تا با دورتر کردن مصالح از تار خنثی، بتوان توانایی مقطع در تحمل خمش را افزایش داد.



تبدیل تیر I شکل به مقطع لانه‌زنبوری

تار خنثی (Neutral Axis) برای هر مقطع، محوری است که در هنگام خمش، تنش خمشی بر روی آن صفر باشد یا به عبارتی، کشش و یا فشار ناشی از خمشی بر روی این محور ایجاد نشود، در نتیجه این محور تغییر شکل هم نمی‌دهد.

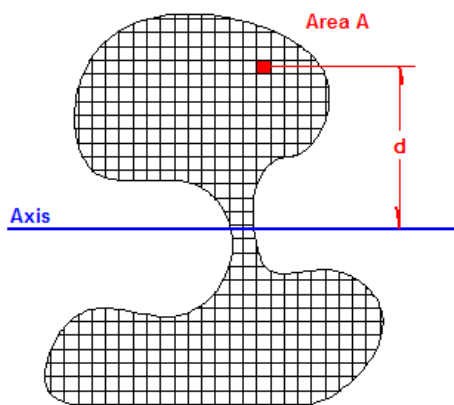


محاسبه‌ی ممان اینرسی به کمک فرمول اصلی آن

ممان اینرسی یک سطح، از حاصل ضرب مساحت المان‌های کوچک (dA)، در مجذور فاصله‌ی آن‌ها تا تار خنثی (y^2) به دست می‌آید.

$$I = \int y^2 dA$$

در شکل زیر، مشاهده می‌شود که مقطع به المان‌های کوچک تقسیم شده و برای محاسبه‌ی ممان اینرسی کل مقطع، مساحت هر المان A ، در d^2 ضرب خواهد شد.

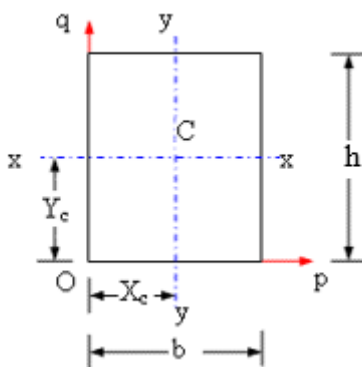


تقسیم شکل به المان‌های دیفرانسیلی (کوچک) جهت محاسبه‌ی ممان اینرسی

در ادامه، این فرمول را می‌توان در محاسبه‌ی ممان اینرسی مقاطع پرکاربرد استفاده نمود. به عنوان مثال، ممان اینرسی مستطیل و همچنین مثلث در بخش بعد محاسبه شده است.

محاسبه‌ی ممان اینرسی مستطیل و مثلث

ممان اینرسی را می‌توان برای محورهای مختلف محاسبه نمود. در شکل زیر دو محور اصلی مقطع (محورهای x و y) نشان داده شده‌اند.



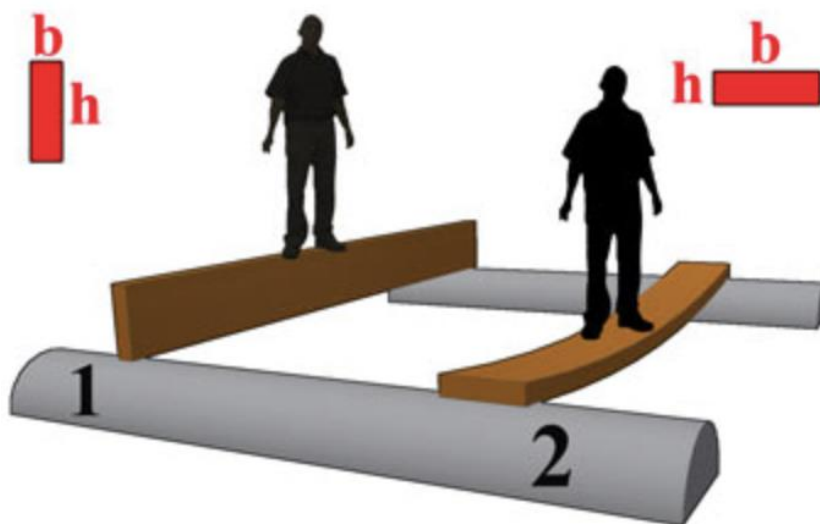
برای محاسبه‌ی ممان اینرسی حول محور x به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int y^2 (b \times dy) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = b \times \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \times \left(\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right) = \frac{bh^3}{12}$$



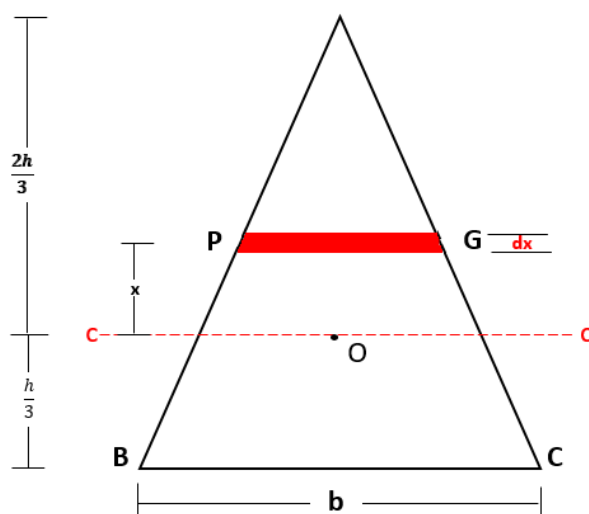
به همین ترتیب در صورتی که ممان اینرسی را حول محور y هم محاسبه نماییم این مقدار برابر با $I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$ خواهد بود. همان طور که مشاهده می شود بُعد ممان اینرسی طول به توان چهار است.

با توضیحاتی که تا بدین جا ارائه شده به نظر شما ممان اینرسی حول کدام محور بزرگتر است؟ همان طور که از فرمول های نهایی حاصل برای هر یک از محورها هم مشخص می باشد، به دلیل اینکه در حالت اول فاصله ی مصالح از محور دوران (محوری که ممان اینرسی حول آن محاسبه می شود) دورتر است، در نتیجه $I_{xx} > I_{yy}$ خواهد بود. در شکل زیر هم مشاهده می شود برای مقطع ۱ که دوران حول محور x انجام می شود، به دلیل بزرگتر بودن ممان اینرسی، مقطع کمتر دچار تغییر شکل شده است.



تأثیر ممان اینرسی مقطع در تغییر شکل در اثر خمش

یکی دیگر از شکل های پر کاربرد که می توان ممان اینرسی آن را محاسبه نمود مثلث است. در ابتدا ممان اینرسی حول محوری افقی عبوری از مرکز سطح (محور C-C) محاسبه می شود:



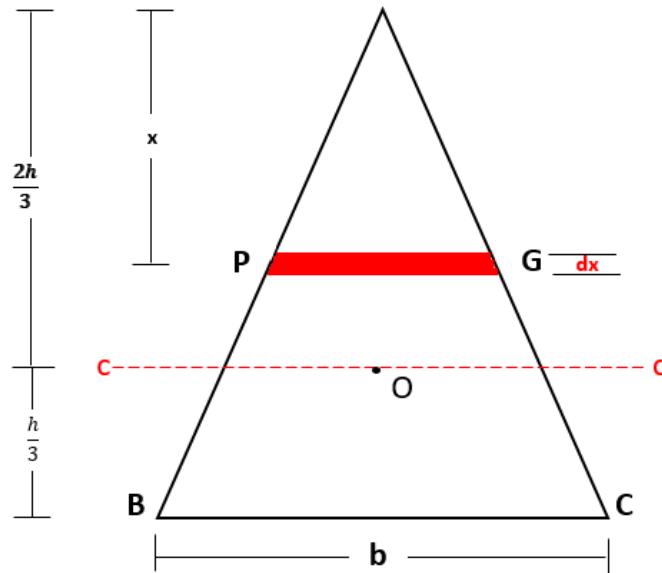
$$\frac{PG}{BC} = \frac{\frac{2h}{3} - x}{h} \rightarrow PG = \frac{\frac{2h}{3} - x}{h} \times b$$



$$PG \text{ مساحت المان} = \frac{2h-x}{h} b dx$$

$$\begin{aligned} I_C &= \int x^2 dA = \int x^2 \left(\frac{2h-x}{h} b dx \right) \\ &= \int_{\frac{h}{3}}^{+\frac{2h}{3}} x^2 \times \left(\frac{2hb}{3h} - \frac{3xb}{3h} \right) dx = \left(\frac{2b}{3} \frac{x^3}{3} - \frac{b}{h} \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{\frac{h}{3}}^{+\frac{2h}{3}} = \left(2b \frac{\left(\frac{2h}{3}\right)^3}{9} - \frac{b}{h} \frac{\left(\frac{2h}{3}\right)^4}{4} \right) - \left(2b \frac{\left(\frac{h}{3}\right)^3}{9} - \frac{b}{h} \frac{\left(\frac{h}{3}\right)^4}{4} \right) \\ &= \left(2b \frac{8h^3}{27} - \frac{b}{h} \frac{16h^4}{81} \right) - \left(2b \frac{\left(\frac{h^3}{27}\right)}{9} - \frac{b}{h} \frac{h^4}{81} \right) = bh^3 \left(\frac{16}{27 \times 9} - \frac{16}{81 \times 4} + \frac{2}{27 \times 9} + \frac{1}{81 \times 4} \right) = \frac{bh^3}{36} \end{aligned}$$

با استفاده از همین روش و انتگرال گیری حول محورهای مختلف می توان ممان اینرسی را محاسبه نمود. در ادامه ممان اینرسی حول محور عبوری از ضلع BC محاسبه شده است.



$$\begin{aligned} \frac{PG}{BC} &= \frac{x}{h} \rightarrow PG = \frac{x}{h} \times b \\ PG \text{ مساحت المان} &= \frac{xb}{h} dx \end{aligned}$$

ممان اینرسی حول محور عبوری از ضلع BC:

$$\begin{aligned} I_{BC} &= \int (h-x)^2 dA \\ &= \int (h-x)^2 \left(\frac{xb}{h} \times dx \right) = \frac{b}{h} \int_0^{+h} x(h-x)^2 dx = \frac{b}{h} \left(\frac{x^2 h^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{2hx^3}{3} \right) \Big|_0^{+h} = \frac{b}{h} \left(\frac{h^2 h^2}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2hh^3}{3} \right) \\ &= \frac{b}{h} \left(\frac{6h^4 + 3h^4 - 8h^4}{12} \right) = \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$

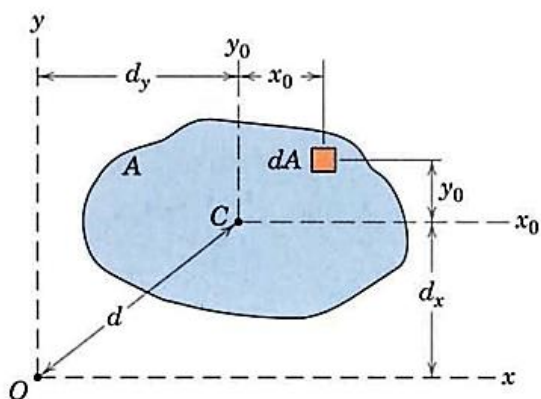


با توجه به محاسبات فوق می توان به این نتیجه رسید که محاسبه ی ممان اینرسی حول محورهای مختلف از طریق انتگرال گیری چندان ساده نبوده و احتیاج به صرف وقت و دقت فراوانی می باشد، به همین دلیل بسیاری از مهندسیین، ممان اینرسی اشکال اصلی را حول محورهای مهم آن به خاطر می سپارند. در جدول زیر ممان اینرسی برخی اشکال مهم حول محورهای اصلی آن ها قابل مشاهده است.

Shape (Images: Wikipedia 2012)	I_c (Centroidal 2nd Moment of Area)	Centroid (Centre of Area)	Area
	<p>Rectangle Bending about centroid (centre).</p> $I_c = \frac{bh^3}{12}$ <p>$b = \text{breadth}, h = \text{height}$</p>	At centre	$A = b \cdot h$
	<p>Circle Bending about centroid (centre).</p> $I_c = \frac{\pi d^4}{64}$ <p>$r = \text{radius}$</p>	At centre	$A = \pi r^2$
	<p>Triangle Bending about centroid.</p> $I_0 = \frac{bh^3}{36}$ <p>$b = \text{breadth}, h = \text{height}$</p>	$X_c = h/3$ $Y_c = b/3$	$A = 0.5 \cdot b \cdot h$

روش انتقال محورها برای محاسبه ی ممان اینرسی، حول محورهای مختلف مقطع

همان طور که مشاهده شد تا به اینجا ممان اینرسی به کمک انتگرال گیری حول محورهای مختلف مقاطع محاسبه شد و در پایان متوجه شدیم که به دلیل زمان بر بودن این محاسبات بهتر است فرمول ممان اینرسی حول محورهای اصلی برای برخی اشکال را به خاطر بسپاریم. اما در بسیاری از حالات نیاز به محاسبه ی این پارامتر، حول سایر محورهای عبوری از مقطع هم داریم و طبیعتاً امکان به خاطر سپردن ممان اینرسی، حول تمامی محورها وجود ندارد. در این مواقع استفاده از روش انتقال محورها بسیار مفید است. با توجه به این قانون با داشتن ممان اینرسی حول یک محور، می توان ممان اینرسی را حول سایر محورهایی که موازی با محور اولیه می باشند، محاسبه نمود. به عنوان مثال در شکل زیر، ممان اینرسی حول محوره های X و Y را می توان بر حسب ممان اینرسی حول محوره های x_0 و y_0 به کمک فرمول زیر محاسبه نمود:

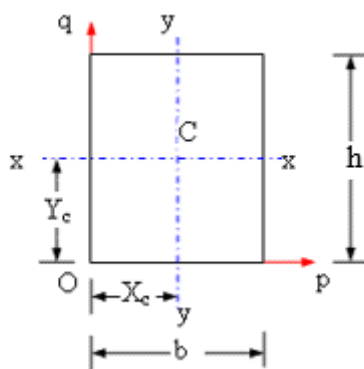


$$I_x = I_{x_0} + A \times d_x^2$$

$$I_y = I_{y_0} + A \times d_y^2$$

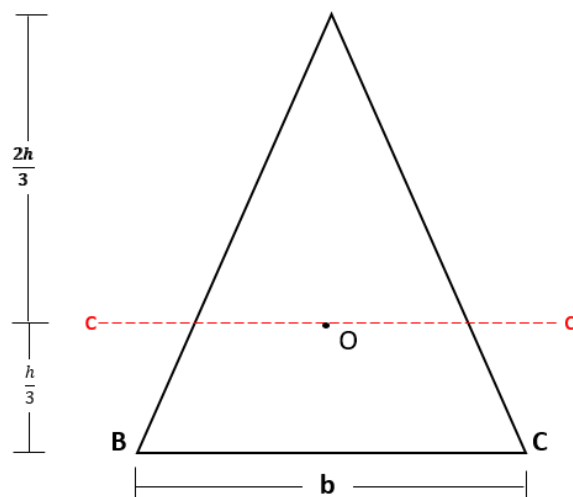
در این رابطه d فاصله ی دو محور موازی و A هم مساحت کل مقطع می باشد.

به عنوان مثال در بخش قبل متوجه شدیم که ممان اینرسی مستطیل حول محور عبوری از مرکز سطح آن $\frac{bh^3}{12}$ خواهد بود. حال در شکل زیر، با توجه به قانون محوره های موازی، ممان اینرسی حول محور p به صورت زیر محاسبه می شود:



$$I_p = I_x + A \times Y_c^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

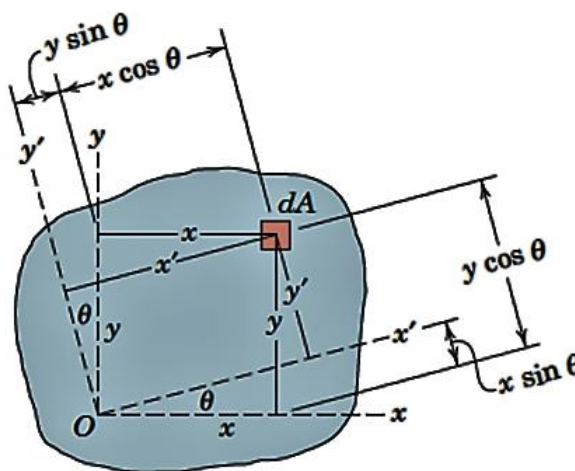
به همین صورت برای مثلث هم می توان، ممان اینرسی را حول قاعده، با توجه به ممان اینرسی حول محور عبوری از مرکز سطح محاسبه نمود (هر دو مقدار در بخش قبل محاسبه شده اند).



$$I_{BC} = I_{cc} + A \times d^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \times \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}$$

روش چرخش (دوران) محورها در محاسبه‌ی ممان اینرسی

گاهی اوقات ممکن است نیاز به محاسبه‌ی ممان اینرسی حول محوری داشته باشیم که موازی با هیچ یک از محورهای اصلی نباشد. در این صورت با داشتن ممان اینرسی در دو جهت عمود بر هم و با استفاده از زاویه‌ی محور مورد نظر با محورهای ذکر شده، ممان اینرسی را می‌توان محاسبه نمود.



به عنوان مثال در شکل زیر ممان اینرسی حول محور x' و y' مدنظر می‌باشد. این دو محور با محورهای x و y زاویه‌ی θ ساخته‌اند. با فرض اینکه ممان اینرسی حول محورهای x و y ، به کمک فرمول‌ها و روش‌های گفته شده در بخش‌های گذشته، قابل محاسبه باشند، با استفاده از فرمول ذیل، $I_{x'}$ و $I_{y'}$ هم محاسبه می‌شوند:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

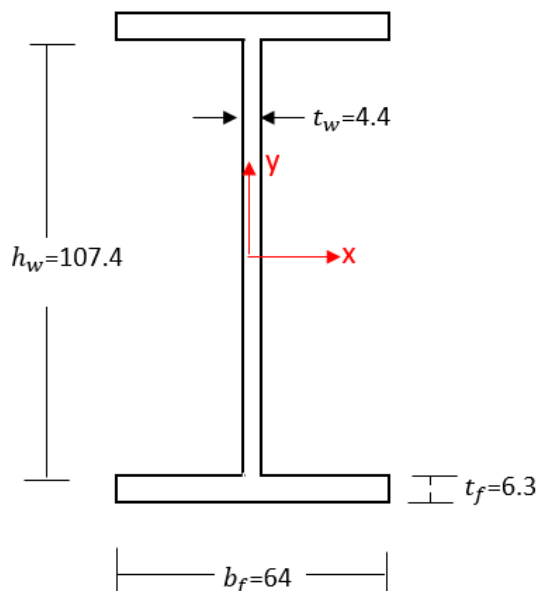
$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$



محاسبه‌ی ممان اینرسی مقاطع مرکب

گاهی اوقات نیاز به محاسبه‌ی ممان اینرسی مقاطع ترکیبی مانند مقطع I شکل داریم. در این شرایط می‌توان مقطع اصلی را به چند مقطع شناخته شده تقسیم نمود و ممان اینرسی هر یک از مقاطع را به صورت جداگانه، به کمک یکی از روش‌ها در بخش‌های گذشته محاسبه نمود، سپس با ترکیب نتایج، ممان اینرسی کل مقطع را به دست آورد.

در شکل زیر ممان اینرسی یک مقطع تیروورق، حول محور x محاسبه شده است



با دقت در این شکل مشخص می‌شود که مقطع از سه قسمت تشکیل شده است، دو مستطیل افقی و یک مستطیل عمودی. ممان اینرسی مستطیل عمودی با توجه به اینکه محور x از مرکز سطح آن عبور نموده است برابر با فرمول ارائه شده در بخش اول می‌باشد:

$$I_{x-\text{مستطیل عمودی}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{t_w h_w^3}{12} = \frac{4.4 \times 107.4^3}{12} = 454238.8 \text{ mm}^4$$

ممان اینرسی مستطیل‌های افقی بالا و پایین، با توجه به قانون انتقال محورها محاسبه می‌شود:

$$I_{x-\text{مستطیل افقی بالا}} = I_{x-\text{مستطیل افقی پایین}} = \frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \times \left(\frac{h_w}{2} + \frac{t_f}{2}\right)^2 = \frac{64 \times 6.3^3}{12} + 6.3 \times 64 \left(\frac{107.4}{2} + \frac{6.3}{2}\right)^2 = 1304445 \text{ mm}^4$$

حال با جمع ممان اینرسی سه شکل، ممان اینرسی کل مقطع به دست می‌آید:

$$I_x = I_{x-\text{مستطیل عمودی}} + I_{x-\text{مستطیل افقی بالا}} + I_{x-\text{مستطیل افقی پایین}} = 454238.8 + 1304445 \times 2 = 3063128 \text{ mm}^4$$

با توجه به نکات ذکر شده، به نظر شما در صورتی که ممان اینرسی حول محور y هم محاسبه شود، آیا مقدار آن بزرگ‌تر از I_x خواهد بود یا کوچک‌تر؟

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر برای شرکت مهندسی سبز سازه محفوظ می‌باشد و هرگونه کپی برداری، تقلید یا بازنشر غیرقانونی بوده و تحت پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.



تور تخصصی طراحی سازه

تور طراحی سازه شبیه سازی یک دوره ۳ ساله هست که شما با آن تنها در [مدت ۹ ماه] به شیوه نوین پروژه آزمونی، جزئی ترین نکات تخصصی طراحی سازه را یاد می گیرید.

- ✓ اعطای گواهینامه معتبر پس از قبولی در آزمون نهایی تور تخصصی طراحی سازه
- ✓ مشاوره تخصصی تور طراحی سازه و بررسی عملکرد به مدت ۶
- ✓ ۳ آزمون مرحله ای تعیین سطح برای به چالش کشیدن قدرت طراحی شما
- ✓ معرفی به عنوان طراح سازه به جامعه مهندسی از طریق سایت سبزسازه
- ✓ عضویت در گروه تلگرامی طراحی سازه با حضور پشتیبان های سبزسازه به مدت شش ماه
- ✓ ارائه نکات منحصر به فرد که در هیچ منبعی به صورت یکجا یافت نمی شود
- ✓ ۱۲۰ ساعت فیلم آموزشی طراحی سازه های مسکونی و صنعتی به همراه مثال های کاربردی
- ✓ ۸ ساعت آموزش ارزش آفرینی برای رسیدن به ارزش درآمدی مدنظرتان

تهدیدها را به **فرصت** تبدیل کنید: با یادگیری حرفه ای طراحی سازه در فصلی که طراحان کم کارند، زمینه جذب بیشترین پروژه ها را برای خود فراهم کنید.

برای اطلاعات بیشتر به آدرس زیر بروید

sbz.one/tts

قدم اول طراحی سازه‌ها را الان بردارید

هیچگاه فکر می‌کردید مدلسازی و نقشه‌خوانی اینقدر نکته‌داشته باشد؟

آیا می‌توانید ستون‌گذاری پیشنهادی معمار را اصلاح کنید؟

آیا مدل کردن دو سازه متفاوت در کنار یکدیگر با زلزله متفاوت را تجربه کرده‌اید؟

آیا رسم قوس و گنبد را بلدید؟

آیا به نقشه‌خوانی که در دانشگاه به شما آموزش نمی‌دهند کاملاً مسلط هستید؟

این مرحله از طراحی سازه را می‌توان **حساس‌ترین و مهم‌ترین مرحله** طراحی دانست! چرا؟ اگر در این بخش سازه به درستی به نرم افزار معرفی نشود، شما هر چقدر در بخش‌های دیگر دقت به خرج دهید بیهوده خواهد بود. پس از همین امروز می‌توانید در ۸ ساعت فیلم آموزشی فشرده، هر نکته‌ای که در مدلسازی و نقشه‌خوانی لازم دارید یاد بگیرید.

آموزش کلیه ریزه‌کاری‌های مدلسازی و نقشه‌خوانی سازه‌ها در ۸ ساعت

بخش اول: استخراج داده‌سازه‌ای از نقشه معماری
بخش دوم: انتخاب سیستم سازه‌ای
بخش سوم: رسم شبکه سازه در نرم افزار ایتبس
بخش چهارم: رسم اعضای سازه‌ای



قیمت اصلی: ۱۰۰,۰۰۰ تومان

**قیمت با تخفیف:
تنها ۳۰,۰۰۰ تومان**

برای دریافت قدم اول طراحی سازه با **۷۰,۰۰۰ تومان تخفیف** به آدرس زیر بروید

sbz.one/fs-tarahi